

## ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 538.935

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.40155

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ В КОНЦЕПЦИИ  
ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ ЛАНДАУЭРА-ДАТТЫ-ЛУНДСТРОМА

© Ю. А. Кругляк

Обсуждаются экспериментальные методы измерения сопротивления в модели ЛДЛ, в том числе в условиях внешнего приложенного магнитного поля: метод переменной длины проводника, четырехточечная схема измерений, классический метод измерения эффекта Холла и различные варианты метода ван дер Пау, а также температурные измерения и учет артефактов (эффект Нернста), измерения в сильных магнитных полях (эффект Шубникова- де Гааза)

**Ключевые слова:** нанофизика, нанoeлектроника, измерение сопротивления, метод ван дер Пау, эффект Холла, температурные измерения, учет артефактов, эффект Нернста, эффект Шубникова

*Experimental methods of measuring the resistance in the frame of the LDL model, including measurements under applied external magnetic field are discussed, namely: method of variable resistor length, four-point measurement scheme, the classical method of the Hall effect measurement and different variants of the van der Pauw method, temperature measurements and accounting for artifacts (Nernst effect), measurements in strong magnetic fields (Shubnikov-de Haas effect)*

**Keywords:** nanophysics, nanoelectronics, resistance measurement, van der Pauw method, Hall effect, thermal measurement, artifact measurement, Nernst effect, Shubnikov effect

## 1. Введение

Заключительный обзор по транспортной модели Ландауэра-Датты-Лундстрёма (ЛДЛ) [1–4] посвящен методам измерений проводимости и эффекта Холла в слабых и сильных магнитных полях, в том числе при перепаде температур на контактах проводника, а также тому, как избавиться при измерении от артефактов таких как сопротивление на контактах и неконтролируемых термоэлектрических эффектов, демонстрируется также обработка результатов при конкретных измерениях.

Для характеристики нового материала проводника в принципе нужно измерять все четыре термоэлектрических коэффициента [3, 4] – проводимость (сопротивление), коэффициент Зеебека (или Соре), коэффициент Пельтье и электронную теплопроводность. Соотношение Кельвина позволяет измерять либо коэффициент Зеебека, либо коэффициент Пельтье. Техника измерения коэффициента Зеебека требует немалого искусства, обсуждать ее здесь не будем, рекомендуем обратиться к отчету [5]. Не легче измерять и электронную теплопроводность, обычно ее оценивают через закон Видемана-Франца. В этом обзоре мы сконцентрируемся на измерении проводимости.

Будем рассматривать токи в диффузионном режиме с уравнением для плотности тока

$$J_x = \sigma \frac{d(E_F/q)}{dx}. \quad (1)$$

При однородном распределении плотности электронов  $d(E_F/q)/dx = E_x$ , так что

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma E_x, \\ E_x &= \rho J_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Обычно меряют проводимость или сопротивление какого-либо материала в диффузионном режиме, поскольку в этом режиме проводимость зависит от материала проводника, а не от его размерности. Стоит также упомянуть, что уравнения (1) и (2) одинаково пригодны как для  $n$ -проводников, так и для  $p$ -проводников.

Уравнения (1) и (2) применимы к 1D, 2D и 3D проводникам, предполагая для простоты пространственную неоднородность только в направлении  $x$ . Единицы измерения зависят от размерности образца, а именно:

$$\begin{aligned} 1D: & E_x \text{ В/м} \quad J_x \text{ А} \quad \rho \text{ Ом/м}, \\ 2D: & E_x \text{ В/м} \quad J_x \text{ А/м} \quad \rho \text{ Ом}, \\ 3D: & E_x \text{ В/м} \quad J_x \text{ А/м}^2 \quad \rho \text{ Ом}\cdot\text{м}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для 2D проводника удельное сопротивление  $\rho$  обычно называют поверхностным сопротивлением  $\rho_s$  и в качестве единицы используют Ом/□ (Ω/sq; Ohms per square) с единицей измерения в Омах.

Рассмотрим плоский резистор, показанный на рис. 1.

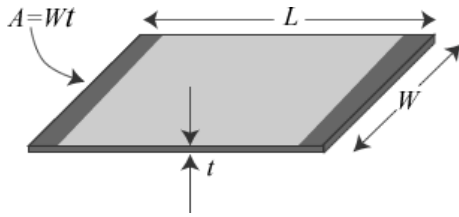


Рис. 1. Принятые обозначения для плоского проводника толщины  $t$ . Если толщина проводника больше половины дебройлевской длины волны для электрона, то электроны в проводнике трехмерны, если же толщина  $t$  мала по сравнению с половиной длины дебройлевской волны, то электроны в таком проводнике двухмерны

Для тока имеем:

$$I = GV = \left( \sigma \frac{A}{L} \right) V = \left( \sigma \frac{Wt}{L} \right) V, \quad (4)$$

при этом  $\sigma_s = (nt)q\mu = n_s q\mu$  и проводимость

$$G = \sigma_s \left( \frac{W}{L} \right), \quad (5)$$

где  $\sigma_s = 1/\rho_s$  есть удельная поверхностная проводимость, а  $n_s$  есть поверхностная плотность электронов. Для 3D образца  $G = \sigma A/L$ , а для 1D проводника  $G = \sigma/L$  [4].

Вычисление поверхностной проводимости плоского проводника толщины  $t$  зависит от того, ведут ли себя электроны в образце как 3D объекты или как 2D объекты. Если  $t$  достаточно велико, так что квантовое удержание является слабым, то электроны нужно рассматривать как 3D частицы и тогда поверхностная проводимость определяется как

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \int t M_{3D}(E) \lambda(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE. \quad (6)$$

Именно это допущение ( $n_s = nt$ ) было принято при переходе от (4) к (5), где  $n$  есть плотность электронов в 3D образце.

Если же толщина образца  $t$  достаточно мала, так что квантовое удержание является сильным, то электроны нужно рассматривать как 2D частицы и тогда поверхностная проводимость [4]

$$\sigma_s = \frac{2q^2}{h} \int M_{2D}(E) \lambda(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE. \quad (7)$$

Напомним, что  $M_{3D} = M/A$  есть удельное число мод проводимости, равное числу мод проводимости, приходящемуся на единицу площади поперечного сечения 3D проводника, а  $M_{2D} = M/W$  есть удельное число мод проводимости, равное числу мод проводимости, приходящемуся на единицу длины поперечного (перпендикулярного направлению тока)

сечения 2D проводника. Если режим транспорта в проводнике оказался квазибаллистическим, то среднюю длину свободного пробега  $\lambda(E)$  нужно заменить ее кажущимся значением [4].

Как видно из (6) и (7), проводимость зависит от положения уровня Ферми, которое в свою очередь зависит от плотности электронов. Таким образом, в конечном итоге проводимость зависит от плотности,  $\sigma_s(n_s)$ . Измерив экспериментально зависимость удельной проводимости от плотности электронов, найдем подвижность электронов из  $\sigma_s = n_s q\mu$ . Конечно, надо иметь в виду, что уравнения (6) и (7) одинаково пригодны как для  $n$ -проводников, так и для  $p$ -проводников.

## 2. Обзор методов измерения сопротивления (проводимости)

Рассмотрим простейшую задачу измерения сопротивления  $R_{ch}$  материала, из которого сделан резистор длины  $L$  (рис. 2):  $R_{ch} = \rho_s L/W$ .

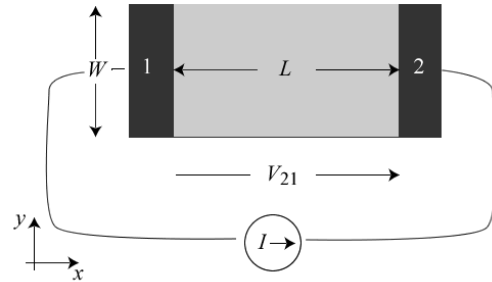


Рис. 2. Плоский резистор с двумя металлическими контактами 1 и 2

При подаче тока на контакт 2 и выведения его с контакта 1 измеряется разность потенциалов  $V_{21}$  и

$$R = \frac{V_{21}}{I} = R_{ch} + 2R_c, \quad (8)$$

где  $R_c$  есть сопротивление контакта металл/полупроводник. Измеренное сопротивление включает в себя сопротивление контакта. Нужно либо отдельно измерить сопротивление контакта, либо заполнить измерения по такой схеме, которая исключала бы сопротивление контактов.

Сначала рассмотрим первый вариант измерения. Он известен как метод переменной длины проводника TLM/ Transmission Line Method [6]. Используется плоский резистор с контактами 1, 2, 3, ..., расположенными на разном расстоянии друг относительно друга (рис. 3).

Если отложить измеренное сопротивление  $R_{ji} = V_{ji}/I$  от расстояния между двумя соседними контактами  $S_{ji}$ , получим прямую линию (рис. 3)

$$R_{ji} = \frac{V_{ji}}{I} = 2R_c + \rho_s \frac{S_{ji}}{W}, \quad (9)$$

Из наклона прямой линии получаем удельное сопротивление, а отсекаемый на оси сопротивления

отрезок дает сопротивление контакта. Можно также извлечь удельное сопротивление контакта в  $\text{Ом} \cdot \text{м}^2$  и расстояние, на которое ток проникает в металл контакта [6].

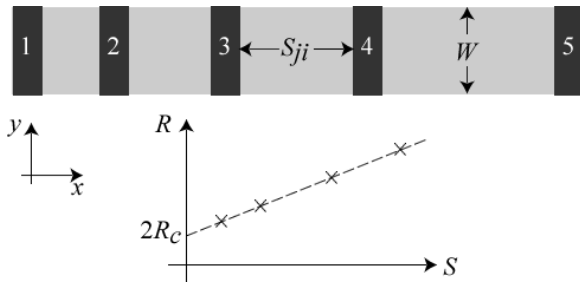


Рис. 3. Контакты расположены, например, на все возрастающем расстоянии  $S_{ji}$  друг относительно друга. Показан типичный график зависимости сопротивления от расстояния между контактами

Теперь рассмотрим второй вариант измерения сопротивления с исключением сопротивления контактов путем использования четырехточечной схемы измерений (рис. 4).

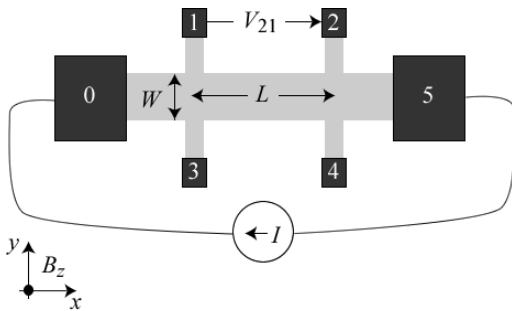


Рис. 4. Схема четырехточечной схемы измерений сопротивления, используемой также для измерения эффекта Холла (холловская линейка)

Контакты 0 и 5 используют для подвода тока, а контакты 1 и 2 или 3 и 4 используются для замера напряжения. Если используется вольтметр с высоким импедансом, ток между измерительными контактами отсутствует, так что нет падения напряжения на границе контактов с измеряемым проводником и замедляется только сопротивление материала проводника:

$$R = \frac{V_{21}}{I} = \rho_s \frac{L}{W}. \quad (10)$$

Детальные сведения об этих широко распространенных измерительных схемах можно найти в [7, 8]. Далее нужно измерить поверхностную плотность электронов.

### 3. Измерение эффекта Холла

Если в четырехточечной измерительной схеме (рис. 4) ток подать в направлении  $+x$ , магнитное поле приложить в направлении  $+z$ , а напряжение мерять в направлении  $+y$  между контактами 1 и 3 или 2 и 4, то результирующее холловское напряжение будет положительным для  $n$ -проводников и отрицательным

для  $p$ -проводников. Эта схема измерений позволяет рассчитать поверхностную плотность электронов.

Поскольку ток идет в направлении  $+x$ , электроны движутся в направлении  $-x$  со средней скоростью, определяемой из  $I_x = Wn_s q \langle v_x \rangle$  (рис. 5).

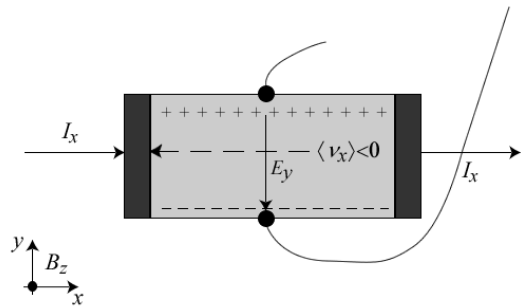


Рис. 5. Эффект Холла и измерение холловского напряжения  $V_H$

Сила Лоренца  $\vec{F}_e = -q\vec{v} \times \vec{B}$  действует на электроны в направлении  $-y$ , что приводит к накоплению электронов на нижней стороне 2D проводника, а на верхней стороне создается дефицит электронов, что в свою очередь порождает электрическое поле в направлении  $-y$ , компенсирующее действие магнитного поля. Соответствующее напряжение  $V_H = -WE_y$  называют холловским.

Анализ эффекта Холла начинается с уравнения [9]

$$\vec{J} = \sigma_s \vec{E} - \sigma_s \mu r_H [\vec{E} \times \vec{B}], \quad (11)$$

где  $r_H$  – холловский фактор, которое далее удобнее выписать покомпонентно, а именно:

$$\begin{aligned} J_x &= \sigma_s E_x - \sigma_s \mu r_H E_y B_z, \\ J_y &= \sigma_s E_y + \sigma_s \mu r_H E_x B_z, \end{aligned} \quad (12)$$

и переписать относительно электрического поля:

$$\begin{aligned} E_x &= \rho_s J_x + (\rho_s \mu r_H B_z) J_y, \\ E_y &= \rho_s J_y - (\rho_s \mu r_H B_z) J_x. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку в описанных выше экспериментальных условиях  $J_y = 0$ , то из второго уравнения имеем:

$$E_y = -\frac{r_H B_z J_x}{q n_s}, \quad (14)$$

что можно переписать в виде

$$R_H \equiv \frac{E_y}{B_z J_x} = \frac{r_H}{(-q)n_s} = \frac{1}{(-q)n_H}, \quad (15)$$

где  $R_H$  называют коэффициентом Холла, а

$$n_H \equiv \frac{n_s}{r_H} \quad (16)$$

называют холловской концентрацией. Напомним, что холловский фактор [9]

$$r_H \equiv \frac{\langle \langle \tau^2 \rangle \rangle}{\langle \langle \tau \rangle \rangle^2} \quad (17)$$

близок к единице (сверху) и его значение определяется механизмом рассеяния в проводнике.

Наконец, выразим коэффициент Холла через экспериментально измеряемое холловское напряжение  $V_H = -WE_y$  и ток  $I = WJ_x$ , а именно:

$$R_H = \frac{-V_H}{IB_z} = \frac{1}{(-q)n_H} \quad (18)$$

Итак, экспериментально измеряемый коэффициент Холла напрямую связан с холловской концентрацией (для  $p$ -проводников  $(-q)$  заменяется на  $(+q)$ ). Холловская концентрация обычно приводится в качестве поверхностной плотности электронов. Нужно, однако, помнить, что холловская концентрация и поверхностная плотность электронов связаны друг с другом соотношением (16).

### 3.1. Пример анализа результатов холловского эксперимента

Проанализируем следующие результаты измерения эффекта Холла на холловской линейке (рис. 4):

$$L = 100 \text{ мкм}, \quad W = 50 \text{ мкм}, \quad I = 1 \text{ мкА}, \quad B_z = 0.2 \text{ Тл}, \\ V_{21}|_{B_z=0} = 0.54 \text{ мВ}, \quad V_{24}|_{B_z=0.2 \text{ Тл}} = 0.13 \text{ мВ}.$$

Из этих результатов измерений можно получить сопротивление измеренного образца, выяснить это проводник  $n$ - или  $p$ -типа, найти поверхностную плотность электронов (точнее, холловскую концентрацию) и подвижность (точнее, холловскую подвижность).

В отсутствии магнитного поля

$$R_{xx} = V_{21} / I = 540 \text{ Ом}. \quad (19)$$

Поскольку измеренное сопротивление  $R_x = \rho_s L / W$  пропорционально удельному поверхностному сопротивлению, то

$$\rho_s = 270 \text{ Ом/}\square. \quad (20)$$

Измеренное холловское напряжение  $V_{24}$  положительно, так что речь идет о проводнике  $n$ -типа. Из уравнения (18) находим коэффициент Холла

$$R_H = \frac{-V_{24}}{IB_z} = -650 \text{ м}^2/\text{Кл} \quad (21)$$

и далее холловскую концентрацию

$$n_H = r_H n_s = 9.6 \times 10^{15} \text{ м}^{-2} = 9.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}. \quad (22)$$

Далее, для удельной поверхностной проводимости имеем:

$$\sigma_s = \frac{1}{\rho_s} \equiv n_s q \mu = n_H q \mu_H, \quad (23)$$

откуда для холловской подвижности получаем

$$\mu_H = r_H \mu = 24100 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}. \quad (24)$$

Можно предположить тот или иной механизм рассеяния, найти холловский фактор  $r_H$  и определить истинные значения поверхностной плотности электронов и их подвижности. Полученные таким образом значения  $n_s$  и  $\mu$  предполагают некоторую неопределенность, связанную с выбором модели рассеяния. Поэтому обычно просто приводят холловские концентрации и подвижность.

### 4. Метод измерений ван дер Пау

Метод ван дер Пау позволяет измерять сопротивление и холловские эффекты плоского образца произвольной формы [7, 8, 10], не прибегая к холловской линейке (рис. 6).

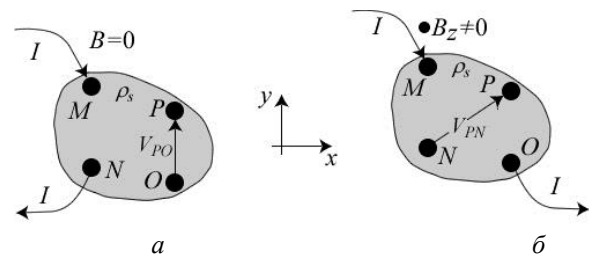


Рис. 6. Метод измерений ван дер Пау:  
а – схема измерения сопротивления;  
б – схема измерения эффекта Холла

Измеряемый образец находится в плоскости  $xy$ . Он может иметь произвольную форму, но проводник должен быть однородным с изотропной проводимостью и не иметь отверстий. Контакты должны быть достаточно точечными и располагаться по периметру образца. При измерении сопротивления ток подается на два соседних контакта, например, М и N, а напряжение меряется между двумя другими контактами Р и О (рис. 6, а). Измеренное таким образом сопротивление

$$R_{MN, OP} = \frac{V_{PO}}{I}$$

позволяет вычислить удельное поверхностное сопротивление.

При измерении эффекта Холла магнитное поле направляется перпендикулярно образцу, ток подается на два противоположных контакта, например, М и О, а напряжение меряется между двумя другими контактами N и P. Измеренное напряжение

$$R_{MO, NP} = \frac{V_{PN}}{I} \quad (25)$$

позволяет вычислить холловское напряжение.

Анализ измерительной схемы ван дер Пау начинаем с уравнений (13)

$$E_x = \rho_s J_x + (\rho_s \mu r_H B_z) J_y, \\ E_y = \rho_s J_y - (\rho_s \mu r_H B_z) J_x.$$

Разность потенциалов между контактами N и P есть интеграл по траектории

$$V_{PN}(B_z) = -\int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_N^P (E_x dx + E_y dy). \quad (26)$$

Холловское напряжение определяется как

$$V_H \equiv \frac{1}{2} [V_{PN}(+B_z) - V_{PN}(-B_z)]. \quad (27)$$

Подставляя (13) в (26), находим

$$V_H = \rho_S \mu_H B_z \left( \int_{y_N}^{y_P} J_x dy - \int_{x_N}^{x_P} J_y dx \right). \quad (28)$$

Ток, входящий в контакт M и выходящий из контакта O, пересекает умозрительную траекторию между контактами N и P. Закон сохранения тока требует, чтобы

$$I = \int_N^P \vec{J} \cdot \hat{n} dl, \quad (29)$$

где  $\hat{n}$  есть единичный вектор, нормальный к траектории, связывающей точки N и P, а именно:

$$\hat{n} dl = d\vec{l} \times \hat{z} = dy \hat{x} - dx \hat{y}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), находим

$$I = \int_{y_N}^{y_P} J_x dy - \int_{x_N}^{x_P} J_y dx, \quad (31)$$

и согласно (28) окончательно

$$V_H = \rho_S \mu_H B_z I. \quad (32)$$

Таким образом, геометрия схемы ван дер Пау действительно позволяет измерить эффект Холла.

Перейдем к измерению сопротивления по ван дер Пау. На рис. 7 схеме измерения сопротивления по ван дер Пау (рис. 6, а) сопоставлена более простая для анализа геометрия контактов, расположенных в ряд по краю бесконечной полуплоскости.

Ван дер Пау, используя технику конформных преобразований, показал, что результаты измерений в обеих схемах (рис. 7, а, б) идентичны при условии, что измеряемый материал проводника однородный, изотропный и не содержит дыр [10].

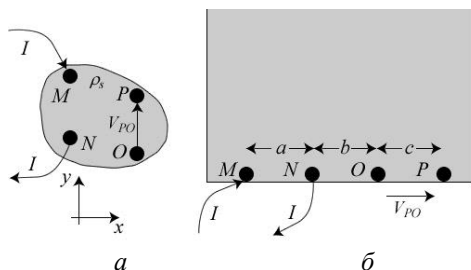


Рис. 7. Сравнение геометрии схемы а – измерения сопротивления по ван дер Пау с умозрительной схемой б – расположения контактов по краю бесконечной полуплоскости и дающей те же результаты измерений, что и схема а при вполне приемлемых ограничениях, накладываемых на измеряемый объект [10]

Рассмотрим, что происходит при входе тока в точечный контакт M бесконечной полуплоскости (рис. 7, б). Ток расходится радиально относительно точки входа с плотностью и полем

$$J_r = \frac{I}{\pi r}, \quad E_r = \frac{I \rho_S}{\pi r}, \quad (33)$$

где  $r$  есть модуль радиус-вектора до произвольной точки полуплоскости, берущего начало в точке входа тока. Интегрируя от  $r_0$  до  $r$ , находим потенциал электрического поля, создаваемый током,

$$V(r) - V(r_0) = -\frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right). \quad (34)$$

Теперь можно написать (рис. 7), что

$$V(P) = -\frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left( \frac{a+b+c}{r_0} \right),$$

$$V(O) = -\frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left( \frac{a+b}{r_0} \right), \quad (35)$$

$$V_{PO} = V(P) - V(O) = -\frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left( \frac{a+b+c}{a+b} \right).$$

Еще есть потеря в потенциале, вызванная током, уходящим из контакта N, а именно:

$$V_{PO}^{(N)} = +\frac{I \rho_S}{\pi} \ln \left( \frac{b+c}{b} \right). \quad (36)$$

Разность потенциалов между контактами O и P есть сумма обоих вкладов. После деления ее на ток получим сопротивление

$$R_{MN,OP} = \frac{V_{PO} + V_{PO}^{(N)}}{I} = \frac{\rho_S}{\pi} \ln \left[ \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} \right], \quad (37)$$

которое зависит от геометрии контактов. Сопротивление определяется последовательностью его индексов в (37): ток входит в контакт M, покидает образец через контакт N, разность потенциалов меряется между контактами O и P с P как положительным терминалом. Подадим ток через контакт N и выведем его через контакт O, а разность потенциалов замерим между контактами P и M. Тогда для сопротивления имеем:

$$R_{NO,PM} = \frac{\rho_S}{\pi} \ln \left[ \frac{(a+b)(b+c)}{ac} \right]. \quad (38)$$

Комбинируя (37) и (38), получим выражение, не зависящее от геометрии контактов, а именно:

$$\exp \left( -\frac{\pi}{\rho_S} R_{MN,OP} \right) + \exp \left( -\frac{\pi}{\rho_S} R_{NO,PM} \right) = 1. \quad (39)$$

Аналогичный результат получен ван дер Пау для геометрии рис. 7, а.

Итак, метод измерения сопротивления по ван дер Пау выглядит следующим образом. Измеряете сопротивление (рис. 6, а) направляя ток через соседние контакты M и N, а разность потенциалов меряете

между двумя другими контактами О и Р:  $R_{MN,OP} = V_{PO}/I$ . Затем делаете аналогичное измерение пропуская ток через контакты N и О, разность потенциалов меряете между Р и М: . Используя два полученных результата измерений, решаете уравнение (39) для  $R_{NO,PM} = V_{PM}/I$  я определения значения удельного поверхностного сопротивления  $\rho_s$ . Образец, используемый в эксперименте, может не иметь какой-либо специальной формы и контакты могут располагаться более или менее произвольно и на разных расстояниях. Для квадратного образца  $a = b = c$  и  $R_{MN,OP} = R_{NO,PM} = V/I$ , так что уравнение (39) упрощается до

$$\rho_s = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{V}{I} \quad (40)$$

и нет нужды решать трансцендентное уравнение (39) методом итераций.

Для измерения эффекта Холла (рис. 6, б) направьте магнитное поле в направлении +z, ток проведите между двумя несоседними контактами М и О, замерьте разность потенциалов между двумя другими контактами N и Р. Поменяйте направление магнитного поля и измерьте ту же самую разность потенциалов. Согласно (32) среднее значение двух этих измерений есть холловское напряжение, которое позволяет вычислить далее холловские коэффициент, концентрацию и подвижность.

Холловская линейка и геометрия ван дер Пау предоставляют два разных способа выполнить одно и то же измерение. Метод ван дер Пау с квадратным расположением контактов (см. (40)) особенно удобен.

### 5. Температурные измерения

Измерение сопротивления и эффекта Холла при разных температурах образца позволяет пролить свет на физику процессов рассеяния в проводнике. Обычно строят график зависимости подвижности от температуры (рис. 8, а).

Если подвижность была определена из холловских измерений, то на оси ординат отложена фактически холловская подвижность. С ростом температуры подвижность вначале растет, выходит на плато, а затем падает. Рост подвижности с температурой обычно связывают с рассеянием электронов на заряженных или ионизированных примесях, а падение подвижности с ростом температуры – с рассеянием на фононах. Если работают одновременно два механизма рассеяния, то наблюдаемая подвижность качественно описывается правилом Матиссена [11, 12]:

$$\frac{1}{\mu_{obs}} = \frac{1}{\mu_{ii}} + \frac{1}{\mu_{ph}}, \quad (41)$$

которое утверждает, что наименьшая подвижность контролирует наблюдаемую подвижность.

Чтобы понять увеличение подвижности с ростом температуры, обратимся к рис. 3 в [13]. Заряженные примеси порождают случайные флуктуации на дне зоны проводимости, которые проявляются в

виде случайно расположенных центров рассеяния. Чем выше кинетическая энергия электронов, а кинетическая энергия носителей тока характеризуется расстоянием от дна зоны проводимости, тем меньше электроны чувствуют флуктуирующий потенциал примесей. Время рассеяния должно расти с ростом энергии. Поскольку средняя кинетическая энергия для невырожденных проводников пропорциональна  $kT$ , то время рассеяния  $\tau$ , а поэтому и подвижность  $\mu = q\tau/m^*$ , должна расти с увеличением температуры. Количественное описание зависимости подвижности от температуры предполагает усреднение должным образом зависимости времени рассеяния от энергии  $\tau(E - E_c)$  согласно уравнению (48) в [9]. В 3D-проводниках рассеяние на заряженных примесях ведет к температурной зависимости  $\sim T^{3/2}$  [11]. Важно следующее. Как только эксперименты показывают рост подвижности с увеличением температуры, это означает, что участие в рассеянии принимают заряженные примеси.

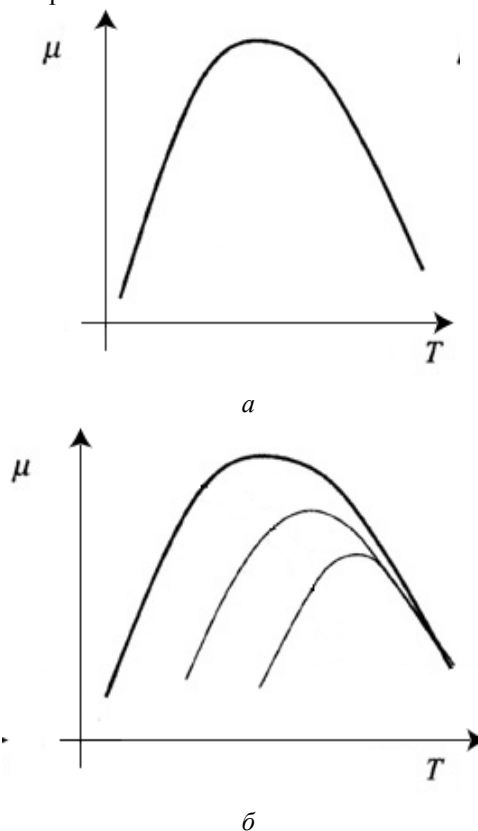


Рис. 8. Типичная зависимость подвижности от температуры: а – характерный вид  $\mu(T)$ ; б – Сдвиг  $\mu(T)$  для трех образцов со все большей концентрацией заряженных примесей

Уменьшение подвижности при высоких температурах, как правило, вызывается рассеянием на фононах. Рассматривая фононы как частицы, скорость рассеяния оказывается пропорциональной числу заселенности фононов

$$\frac{1}{\tau(E)} \propto n_{ph}, \quad (42)$$

которое описывается статистикой Бозе-Эйнштейна:

$$n_{ph}(\hbar\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (43)$$

В ковалентных полупроводниках доминирует рассеяние на акустических фононах. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, можно показать, что основной вклад дают низкоэнергетические фононы. С учетом этого обстоятельства

$$e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT,$$

так что

$$n_{ph}(\hbar\omega) \approx \frac{kT}{\hbar\omega}.$$

Число фононов пропорционально температуре. Тогда из (42) следует, что

$$\tau \propto \frac{1}{kT},$$

так что подвижность должна уменьшаться с ростом температуры. Уточнение показателя степени при температуре требует корректного усреднения времени рассеяния по энергии. В [11] показано, что в 3D проводниках

$$\mu \propto T^{-3/2}.$$

В полярных полупроводниках в рассеянии доминируют оптические фононы с энергией  $\hbar\omega_0 \approx kT$  при комнатной температуре. В этом случае экспоненту в бозевском распределении (43) нельзя разложить по малому показателю степени, и нужно использовать (43) напрямую. Таким образом, в полярных полупроводниках подвижность уменьшается экспоненциально с ростом температуры [11].

На рис. 8, б показана тенденция уменьшения максимально достижимой подвижности в трех образцах, характеризующих все большей концентрацией заряженных примесей. По мере роста подвижности с увеличением температуры преобладающая роль рассеяния на заряженных примесях постепенно нивелируется в конкуренции с рассеянием на фононах. Подвижность достигает своего максимума при равновесии обоих механизмов рассеяния. Дальнейшее увеличение температуры приводит к уменьшению подвижности по мере все большего преобладания рассеяния на фононах над рассеянием на заряженных примесях. Достижение максимума подвижности контролируется рассеянием на заряженных примесях. Чем больше концентрация заряженных примесей в образце, тем требуется все более высокая температура для создания все большей плотности фононов, нивелирующих рассеяние на заряженных примесях и уменьшающих максимально достижимую подвижность, тем меньшего максимума достигает подвижность и тем дальше максимум сдвинут в сторону увеличения температуры. Чем меньше концентрация заряженных примесей в образце, тем большего максимума достигает подвижность, а сам максимум достигается при меньшей температуре. Измерение по-

движности при низких температурах позволяет оценить общую концентрацию заряженных примесей в проводнике. Более детальное обсуждение практики измерений электрофизических свойств проводников в условиях квазиравновесного режима транспорта можно найти в [7, 8].

Далее об одном артефакте при холловских измерениях (эффект Нернста) и затем об измерениях в сильных магнитных полях.

### 5. 1. Температурный артефакт при измерении эффекта Холла (эффект Нернста)

Вернемся к холловской линейке на рис. 4. Ток подается на контакт 0 и покидает проводник через контакт 5. Нужно ожидать охлаждения контакта 5 и нагревания контакта 0 в результате эффекта Пельтье [14]. Ранее всегда предполагалось, что измерения проводятся в изотермических условиях. Если же подложка холловской линейки не обладает достаточными теплоотводящими свойствами, то возможен градиент температуры в направлении оси  $x$ . Как это скажется на измерениях эффекта Холла?

Вернемся к транспортным уравнениям в обращенной форме для 3D проводника в диффузионном режиме [15], а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d(E_F/q)}{dx} &= \rho J_x + S \frac{dT}{dx}, \\ J_{Qx} &= TSJ_x - \kappa \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

и перепишем их в индексных обозначениях [9]:

$$\begin{aligned} E_i &= \rho_{ij}(\vec{B})J_j + S_{ij}(\vec{B})\partial_j T, \\ J_{Qi} &= \pi_{ij}(\vec{B})J_j - \kappa_{ij}(\vec{B})\partial_j T. \end{aligned} \quad (44)$$

У изотропного полупроводника все четыре транспортных тензора диагональны, однако, в присутствии магнитного поля появляются недиагональные компоненты тензора. В слабых магнитных полях диагональные компоненты тензора не изменяются, а недиагональные компоненты появляются из векторных произведений силы Лоренца. Для материалов с кубической симметрией транспортные коэффициенты в присутствии слабого магнитного поля можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(\vec{B}) &= \rho_0 + \rho_0 \mu_H \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ S_{ij}(\vec{B}) &= S_0 + S_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ \pi_{ij}(\vec{B}) &= \pi_0 + \pi_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots, \\ \kappa_{ij}(\vec{B}) &= \kappa_0 + \kappa_1 \epsilon_{ijk} B_k + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Каждый из транспортных коэффициентов в слабом магнитном поле имеет одну и ту же структуру в виде суммы диагональной компоненты, помеченной индексом 0, и недиагональных компонент, происходящих из векторного произведения силы Лоренца и контролируемых по знаку и по отличию от нуля символом Леви-Чивита [9]. Исключая удельное сопротивление, для которого  $\rho_1 = \rho_0 \mu_H$ , для остальных

ных термоэлектрических коэффициентов недиагональные компоненты не раскрыты, им просто присвоен индекс 1.

Вернемся, наконец, к вопросу как влияет температурный градиент в направлении  $x$  на измеряемое холловское напряжение. Из уравнения (44) имеем:

$$E_y = \rho_0 J_y + \rho_0 \mu_H \epsilon_{yjk} B_k J_j + S_0 \partial_y T + S_1 \epsilon_{yjk} B_k \partial_y T. \quad (46)$$

Условия проведения эксперимента таковы, что ток направлен только по оси  $x$ , а магнитное поле направлено по оси  $z$ . Предположим также, что градиент температуры вдоль оси  $y$  отсутствует. В этих условиях вместо (46) имеем:

$$E_y = +\rho_0 \mu_H \epsilon_{yjk} B_z J_x + S_1 \epsilon_{yjk} B_z \partial_x T. \quad (47)$$

Наконец, используя значение символа Леви-Чивита  $\epsilon_{yjk} = -1$  [9], получаем

$$E_y = -\rho_0 \mu_H B_z J_x - S_1 B_z \partial_x T. \quad (48)$$

Первое слагаемое – это чистый эффект Холла. Второе же слагаемое – артефакт, вызванный градиентом температуры в направлении  $x$ , который был создан током в том же направлении, и порождающий дополнительную компоненту электрического поля в направлении  $y$  (эффект Нернста). Из (48) следует, что при одновременном изменении направления тока и магнитного поля на противоположное, слагаемое, ответственное за эффект Холла, знак не меняет, а второе слагаемое – меняет знак на противоположный. Таким образом, измерив холловское напряжение, а затем переключив направления электрического и магнитного полей на противоположные, измерив еще раз холловское напряжение и взяв среднее из двух измерений, можно избавиться от этого артефакта. Это переключение нужно сделать достаточно быстро настолько, чтобы градиент температуры  $\partial T / \partial x$  не успел изменить свой знак. Подобные термомагнитные эффекты могут исказить интерпретацию результатов холловских измерений [11, 16]. Даже в отсутствие магнитного поля продольный температурный градиент, вызванный эффектом Пельтье, может исказить результаты измерения сопротивления.

## 6. Измерения в сильных магнитных полях

При решении транспортного уравнения Больцмана с учетом магнитного поля [9] предполагалось, что магнитное поле слабое, так что

$$\omega_c \tau \ll 1, \quad (49)$$

где для параболической дисперсии циклотронная частота

$$\omega_c = \frac{qB}{m^*}. \quad (50)$$

Из этих двух уравнений следует условие слабости магнитного поля

$$\mu B \ll 1. \quad (51)$$

Ниже обсуждаются три вопроса:

1) физический смысл условия слабости магнитного поля (49);

2) циклотронная частота для произвольной дисперсии  $E(k)$ ;

3) влияние величины магнитного поля на результаты измерений.

На рис. 9 показана траектория движения электрона в плоскости  $xu$  под действием магнитного поля, направленного в сторону  $+z$ .

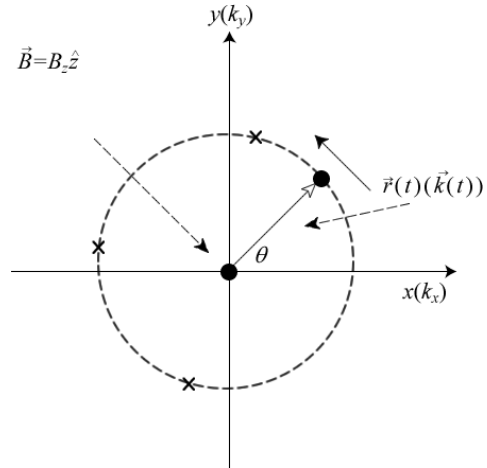


Рис. 9. К вычислению циклотронной частоты. Крестиком на траектории отмечены акты рассеяния

Период обращения по орбите равен  $T = 2\pi/\omega_c$ , так что условие слабости магнитного поля (49) эквивалентно  $T \gg \tau$ . В слабых магнитных полях период обращения электрона намного превышает время между двумя последовательными столкновениями, так что электроны редко завершают круговые орбиты. В сильных магнитных полях  $T \ll \tau$  и электроны, прежде чем столкнуться, успевают совершить одно или несколько круговых движений.

Уравнение движения электрона (рис. 9) есть

$$\frac{d(\hbar \vec{k})}{dt} = -q \vec{v} \times \vec{B} \quad (52)$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned} \hbar \frac{dk_x}{dt} &= -q v_y B_z, \\ \hbar \frac{dk_y}{dt} &= +q v_x B_z, \end{aligned}$$

что дает (рис. 9):

$$\begin{aligned} \hbar k \frac{d(\cos \theta)}{dt} &= -q(v \sin \theta) B_z, \\ \hbar k \frac{d(\sin \theta)}{dt} &= +q(v \cos \theta) B_z. \end{aligned} \quad (53)$$

Дифференцируя по времени первое из уравнений (53) и используя второе уравнение, получим

$$\frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} = -\omega_c^2 \cos \theta, \quad (54)$$



где искомая циклотронная частота для произвольной, но изотропной зонной структуры

$$\omega_c = \frac{qv}{\hbar k} B_z. \quad (55)$$

Для параболической дисперсии

$$v = \frac{\hbar k}{m^*},$$

что и дает для этой дисперсии циклотронную частоту (50). Выражение (55) используется для нахождения циклотронной частоты в графене [17].

Рассмотрим несколько типичных примеров. У слабодопированного Si подвижность составляет около  $1000 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . У распространенного лабораторного магнита  $B=0.2 \text{ Тл}$ , так что  $\mu B \approx 0.02 \ll 1$ , и мы гарантировано находимся в режиме слабого магнитного поля. Не трудно приобрести магнит с полем, большим раз в 10, но мы все еще будем в режиме слабых полей. Для работы в режиме уже сильного магнитного поля нужны магниты с полем, большим раз в 100. Подобные магниты доступны, но редко используются в рутинных экспериментах.

Ситуация совсем другая для проводников с высокой подвижностью, например, для полупроводников группы III-V или для модуляционно-легированных гетероструктур. Например, рассмотрим InGaAs при 300 K. Подвижность возможна порядка  $10^4 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Тогда

$\mu B \approx 0.2 < 1$  и мы все еще в режиме слабого поля. Если понизить температуру образца до 77 K и желательнее ниже, то вполне достижима подвижность в  $10^5$  и даже выше. Теперь  $\mu B \approx 2 > 1$  и режим сильного магнитного поля уже достижим для распространенных лабораторных магнитов. В сильных полях наблюдаются интересные эффекты.

Обратимся к уравнению (54). Оно описывает гармонические колебания. Уровни энергии гармонического осциллятора квантуются согласно

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c. \quad (56)$$

Применительно к рассматриваемой нами ситуации эти уровни энергии называют уровнями Ландау.

Рассмотрим 2D проводник в магнитном поле  $B_z$ . В отсутствие магнитного поля плотность состояний (рис. 10, а)

$$D_{2D}(E) = g_v \frac{m^*}{\pi \hbar^2}, \quad (E > \varepsilon_1) \quad (57)$$

где  $\varepsilon_1$  – дно первой подзоны, и предполагается, что следующие подзоны не заполнены.

В присутствии сильного магнитного поля плотность состояний дается суммой  $\delta$ -функций:

$$D_{2D}(E, B_z) = D_0 \sum_{n=0}^{\infty} \delta \left[ E - \varepsilon_1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \right], \quad (58)$$

где  $D_0$  – вырождение уровней Ландау. Расстояние между ними  $\hbar \omega_c$  и вырождение

$$D_0 = \hbar \omega_c \left( g_v \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \right) = g_v \frac{2qB_z}{h}. \quad (59)$$

Рассеяние уширяет уровни Ландау (рис. 10, б). Ширина каждого уровня определяется принципом неопределенности  $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ . Приняв  $\Delta t$  близким к времени рассеяния,  $\Delta t \approx \tau$ , получаем  $\Delta E \approx \hbar/\tau$ . Сильное магнитное поле определяется как поле, достаточное для различения отдельных уровней Ландау. Для этого расстояние между уровнями Ландау  $\hbar \omega_c$  должно превышать уширение  $\Delta E$  отдельной линии, что ведет к известному неравенству  $\omega_c \tau \gg 1$  и тем самым демонстрирует еще одну физическую интерпретацию неравенства (49).

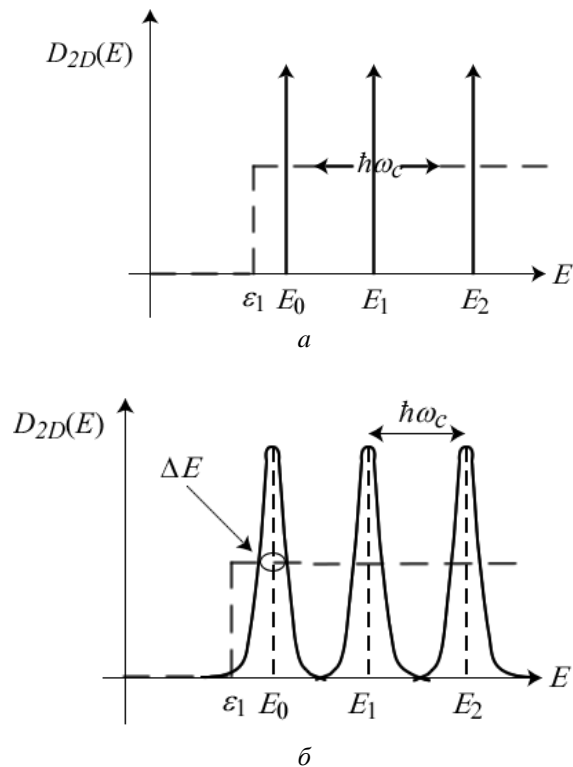


Рис. 10. Магнитное поле изменяет плотность состояний 2D проводника: а – рассеяние отсутствует; б – рассеяние уширяет уровни Ландау

### 6. 1. Осцилляции Шубникова – де Гааза

Интересные эффекты возникают при измерении сопротивления и эффекта Холла в изменяемом сильном магнитном поле. Пусть у нас есть модуляционно-легированная пленка с  $n_s = 5 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$  и подвижностью  $\mu = 1 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ . Зададимся вопросом, сколько уровней Ландау заселено, если  $B_z = 1 \text{ Тл}$ .

Сначала нужно выяснить, расщепляются ли уровни Ландау. Для подвижности  $\mu = 1 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с} = 10 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  имеем

$$\mu B_z = 10 \gg 1 \quad (60)$$

и мы явно находимся в режиме сильного магнитного поля. Далее вычисляем вырождение уровней Ландау. Предполагая  $g_v = 1$ , находим

$$D_0 = \frac{2qB_z}{h} = 4.8 \times 10^{10} \text{ см}^{-2},$$

так что

$$\frac{n_s}{D_0} = 10.4,$$

т. е. первые 10 уровней Ландау заселены, а уровень Ферми лежит в пределах 11-го уровня Ландау.

Рис. 11 показывает результаты измерения подобной структуры [18].

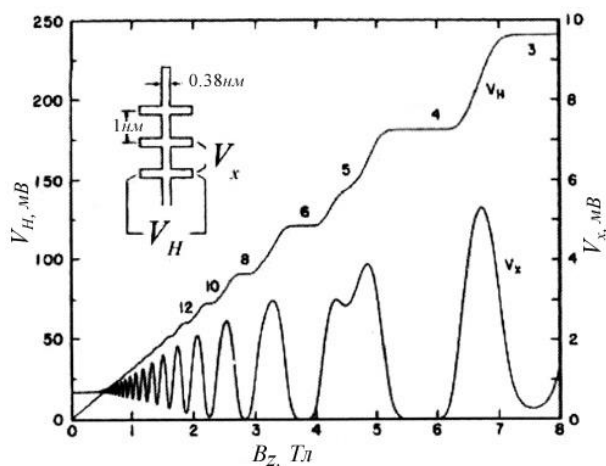


Рис. 11. Холловские измерения модуляционно-легированной структуры AlGaAs/GaAs в сильном магнитном поле при 1.2 K. Инжектированный ток – 25.5 мкА и  $n_s = 5.6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$  [18]

Рассмотрим сначала продольное сопротивление  $R_{xx} = V_x/I$  (правая ось на рис. 11). При слабых полях сопротивление не зависит от магнитного поля и является сопротивлением образца. По мере увеличения магнитного поля  $R_{xx}$  начинает осциллировать. Осцилляции становятся все более выраженными по мере того как все больше проявляются уровни Ландау. Эти осцилляции  $R_{xx}$  известны как осцилляции Шубникова – де Гааза [19, 20]. Период осцилляций позволяет измерить поверхностную плотность электронов [21]. Когда магнитное поле становится очень сильным,  $R_{xx}$  фактически зануляется. Это – квантовый эффект Холла [18, 21–24].

Поведение холловского напряжения также представляет интерес (левая ось на рис. 11). В слабых магнитных полях холловское напряжение пропорционально полю, согласно (32). По мере усиления магнитного поля начинается квантование холловского напряжения, сопровождаемое ростом высоты и ширины ступенек квантования. Сами ступеньки совпадают с участками зануления  $R_{xx}$ . Квантование холловского напряжения настолько

прецизионное, что может служить стандартом сопротивления [18].

## 7. Выводы

Холловская линейка и измерительные геометрии ван дер Пау позволяют измерить как сопротивление, так и холловскую концентрацию и холловскую подвижность. При желании можно оценить и холловский фактор, что позволит более точно определить поверхностную плотность электронов и их истинную подвижность. Однако, на практике обычно приводят холловскую концентрацию и холловскую подвижность. Температурные измерения помогают идентифицировать доминирующий механизм рассеяния. Холловские измерения требуют особой тщательности с целью избежать проявления гальвано- и термомагнитных эффектов, таких как эффект Нернста, поперечный термомагнитный эффект Риги – Ледюка, поперечный гальванотермомагнитный эффект Эттингсхаузена. Существенно новую информацию предоставляют измерения в сильных магнитных полях, однако для подобных экспериментов нужны материалы с высокой подвижностью.

В основу настоящего обзора положены лекции Марка Лундстрема «Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications» [2] и Суприе Датты «Fundamentals of Nanoelectronics, Part I: Basic Concepts» [1], прочитанных в 2011–2012 годах в рамках инициативы Purdue University/nanoHUB-U [www.nanohub.org/u], а также наша статья [24].

## 8. Благодарности

Благодарю Н. Е. Кругляк за помощь в работе по подготовке рукописи к печати.

## Литература

1. Datta Supriyo. Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport [Electronic resource] / Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2012. – 473 p. – Available at: <https://nanohub.org/courses/FoN1>
2. Lundstrom, M. Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications [Electronic resource] / M. Lundstrom, J. Changwook. – Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2013. – 227 p. – Available at: <https://nanohub.org/resources/11>
3. Kruglyak, Yu. Landauer-Datta-Lundstrom Generalized Transport Model for Nanoelectronics [Text] / Yu. Kruglyak // Journal of Nanoscience. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–15. doi: 10.1155/2014/725420
4. Кругляк, Ю. А. Обобщенная модель транспорта электронов и тепла Ландауэра-Датты-Лундстрема в микро- и наноэлектронике [Текст] / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2014. – Т. 5, № 2(5). – С. 21–38. doi: 10.15587/2313-8416.2014.30728
5. Danielson, L. Measurement of the thermoelectric properties of bulk and thin film materials [Text] / L. Danielson // Conference. – 1996 – Available at: <http://www.osti.gov/scitech/biblio/663573>
6. Berger, H. H. Models for contacts to planar devices [Text] / H. H. Berger // Solid-State Electronics. – 1972. – Vol. 15, Issue 2. – P. 145–158. doi: 10.1016/0038-1101(72)90048-2
7. Schroder, D. K. Semiconductor Material and Device Characterization [Text] / D. K. Schroder. – Wiley Interscience, New York, 2006. – 800 p.

8. Look, D. C. Electrical Characterization of GaAs Materials and Devices [Text] / D. C. Look // John Wiley and Sons, New York. – 1989. – Vol. 5, Issue 4. – P. 314–315. doi: 10.1002/adma.19930050429

9. Кругляк, Ю. А. Модель проводимости Ландауэра-Датты-Лундстрема в микро- и нанoeлектронике и транспортное уравнение Больцмана [Текст] / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2015. – Т. 3, № 2 (8). – С. 108–116. doi: 10.15587/2313-8416.2015.38848

10. Van der Pauw, L. J. A method for measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape [Text] / L. J. van der Pauw // Phillips Research Reports, – 1958. – Vol. 13. – P. 1–9.

11. Lundstrom, M. Fundamentals of Carrier Transport, 2nd Ed. [Text] / M. Lundstrom. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – 418 p. doi: 10.1017/cbo9780511618611

12. Ашкрофт, Н. Физика твердого тела. Т. 1–2 [Текст] / Н. Ашкрофт, Н. Мермин. – М.: Мир, 1979. – 458 с.

13. Кругляк, Ю. А. Учет рассеяния в транспортной модели Ландауэра-Датты-Лундстрема [Текст] / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2015. – Т. 3, № 2 (8). – С. 100–107. doi: 10.15587/2313-8416.2015.38847

14. Кругляк, Ю. А. Термоэлектрические явления и устройства в концепции Ландауэра-Датты-Лундстрема / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2015. – Т. 1, № 2 (6). – С. 69–77. doi: 10.15587/2313-8416.2015.35891

15. Кругляк, Ю. А. Термоэлектрические коэффициенты в транспортной модели Ландауэра-Датты-Лундстрема / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2015. – Т. 1, № 2 (6). – С. 78–89. doi: 10.15587/2313-8416.2015.35893

16. Wolfe, C. M. Physical Properties of Semiconductors [Text] / C. M. Wolfe, N. Holonyak, G. E. Stillman. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey. – 1989. – 368 p.

17. Кругляк, Ю. А. Графен в транспортной модели Ландауэра-Датты-Лундстрема [Текст] / Ю. А. Кругляк // ScienceRise. – 2015. – Т. 2, № 2 (7). – С. 93–106. doi: 10.15587/2313-8416.2015.36443

18. Cage, M. E. A test of the quantum Hall effect as a resistance standard, IEEE Trans [Text] / M. E. Cage, R. F. Dziuba, B. F. Field // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1985. – Vol. IM-34, Issue 2. – P. 301–303. doi: 10.1109/tim.1985.4315329

19. Schubnikov, L. W. Proceedings of the Royal [Text] / L. W. Schubnikov, W. J. de Haas // Netherlands Academy of Arts and Science. – 1930. – Vol. 33. – P. 130.

20. Schubnikov, L. W. Proceedings of the Royal [Text] / L. W. Schubnikov, W. J. de Haas // Netherlands Academy of Arts and Science. – 1930. – Vol. 33. – P. 163.

21. Holcomb, D. F. Quantum electrical transport in samples of limited dimensions [Text] / D. F. Holcomb // American Journal of Physics. – 1999. – Vol. 67, Issue 4. – P. 278–297. doi: 10.1119/1.19251

22. Davies, J. H. The physics of Low-Dimensional Semiconductors [Text] / J. H. Davies. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. – 438 p. doi: 10.1017/cbo9780511819070

23. Datta, S. Electronic Transport in Mesoscopic Systems [Text] / S. Datta. – Cambridge: Cambridge University Press: 2001, 1995. – 377 p. doi: 10.1017/cbo9780511805776

24. Кругляк, Ю. О. Уроки нанoeлектроніки: ефект Холла і вимірювання електрохімічних потенціалів у концепції «знизу – вгору» [Текст] / Ю. О. Кругляк, М. В. Стріха // Sensor Electronics Microsys. Tech. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 5–27.

## References

1. Datta Supriyo (2012). Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport. Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 473. Available at: <https://nanohub.org/courses/FoN1>

2. Lundstrom, M., Jeong, C. (2013). Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications. Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing Company, 227. Available at: <https://nanohub.org/resources/11>

3. Kruglyak, Yu. (2014). Landauer-Datta-Lundstrom Generalized Transport Model for Nanoelectronics. Journal of Nanoscience, 2014, 1–15. doi: 10.1155/2014/725420

4. Kruglyak, Yu. A. (2014). Generalized Landauer-Datta-Lundstrom model of electron and heat transport for micro- and nanoelectronics. ScienceRise, 5/2 (5), 21–38. doi: 10.15587/2313-8416.2014.30728

5. Danielson, L. (1996). Measurement of the thermoelectric properties of bulk and thin film materials. Available at: <http://www.osti.gov/scitech/biblio/663573>

6. Berger, H. H. (1972). Models for contacts to planar devices. Solid-State Electronics, 15 (2), 145–158. doi: 10.1016/0038-1101(72)90048-2

7. Schroder, D. K. (2006), Semiconductor Material and Device Characterization, Wiley Interscience, New York, 800.

8. Smith, R. S. (1993). Electrical characterization of GaAs materials and devices. By D. C. Look, Wiley, Chichester 1989, 280. doi: 10.1002/adma.19930050429

9. Kruglyak, Yu. A. (2015). Landauer-Datta-Lundstrom conductivity model for micro- and nanoelectronics and Boltzmann transport equation. ScienceRise, 3/2 (8), 108–116. doi: 10.15587/2313-8416.2015.38848

10. van der Pauw, L. J. (1958). A method for measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape. Phillips Research Reports, 13, 1–9.

11. Lundstrom, M. (2000). Fundamentals of Carrier Transport. Cambridge UK: Cambridge University Press, 418. doi: 10.1017/cbo9780511618611

12. Ashcroft, N., Mermin, N. (1979). Physics of solid. Vol. 1-2. Moscow: Mir, 458.

13. Kruglyak, Yu. A. (2015). Accounting for scattering in Landauer-Datta-Lundstrom transport model. ScienceRise, 3/2 (8), 100–107. doi: 10.15587/2313-8416.2015.38847

14. Kruglyak, Yu. A. (2015). Thermoelectric phenomena and devices in Landauer-Datta-Lundstrom conception. ScienceRise, 1/2 (6), 69–77. doi: 10.15587/2313-8416.2015.35891

15. Kruglyak, Yu. A. (2015). Thermoelectric coefficients in Landauer-Datta-Lundstrom transport model. ScienceRise, 1/2 (6), 78–89. doi: 10.15587/2313-8416.2015.35893

16. Wolfe, C. M., Holonyak, N., Stillman, G. E. (1989). Physical Properties of Semiconductors. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey, 368.

17. Kruglyak, Yu. A. (2015). Graphene in Landauer-Datta-Lundstrom transport model, ScienceRise, 2/2 (7), 93–106. doi: 10.15587/2313-8416.2015.36443

18. Cage, M. E., Dziuba, R. F., Field, B. F. (1985). A test of the quantum Hall effect as a resistance standard, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, IM-34 (2), 301–303. doi: 10.1109/tim.1985.4315329

19. Schubnikov, L. W., de Haas, W. J. (1930). Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Science, 33, 130.

20. Schubnikov, L. W., de Haas, W. J. (1930). Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Science, 33, 163.

21. Holcomb, D. F. (1999). Quantum electrical transport in samples of limited dimensions. American Journal of Physics, 67, 278–297. doi: 10.1119/1.19251

22. Davies, J. H. (1997), The physics of Low-Dimensional Semiconductors, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 438. doi: 10.1017/cbo9780511819070

23. Datta, S. (1995). Electronic Transport in Mesoscopic Systems. Cambridge: Cambridge University Press: 2001, 377. doi: 10.1017/cbo9780511805776

24. Kruglyak, Yu. A., Strikha, M. V. (2014). Lessons of nanoelectronics: Hall effect and measurement of

electrochemical potentials within "bottom - up" approach, Sensor Electronics Microsys. Tech., 11 (1), P. 5–27.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Глушков О. В.

Дата надходження рукопису 24.03.2015

**Кругляк Юрий Алексеевич**, доктор химических наук, профессор, кафедра информационных технологий, Одесский государственный экологический университет, ул. Львовская, 15, г. Одесса, Украина, 65016  
E-mail: quantumnet@yandex.ua

УДК 535.3: 537.226.

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.40776

## ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ШАРА С ПОВЕРХНОСТНЫМ ЗАРЯДОМ

© Я. С. Криворучко, Л. Б. Лерман

*В электростатическом приближении найдены выражения для поляризуемости диэлектрического шара со связанными поверхностными зарядами. Рассмотрены случаи равномерного и симметричного распределения зарядов на поверхности, а также система  $N$  точечных зарядов. Показано, что возмущенный потенциал в случае постоянного внешнего электростатического поля представляется в виде двух слагаемых. В случае системы точечных зарядов наблюдается мультипольная поляризуемость*

**Ключевые слова:** сферические наночастицы, задача электростатики, поляризуемость, поверхностный электрический заряд, возмущающий потенциал

*Expressions for polarizations of dielectric sphere with bound surface charges are founded in electrostatic approximation. Cases of uniform and symmetrical distributions of charges and systems of  $N$  point charges are considered. It is shown that perturbed potential in the case of a constant external electrostatic field is represented in form of two terms. In the case of a system of point charges is observed multipole polarizability*

**Keywords:** spherical nanoparticles, electrostatic problem, polarizability, surface electrical charge, perturbed potential

### 1. Введение

При рассмотрении процессов взаимодействия электромагнитного излучения (ЭМИ) с веществом широко используется понятие поляризуемости [1, 2]. По определению поляризуемость – это физическое свойство веществ приобретать электрический или магнитный дипольный момент (поляризацию) во внешнем электромагнитном поле. Для ее нахождения необходимо решить некоторую задачу электростатики. Имея выражение для поляризуемости, нетрудно найти практически важные величины, такие как характеристики светорассеяния или эффективную диэлектрическую проницаемость (ДП) матричных дисперсных систем. Поэтому задача нахождения поляризуемости для частиц сложной формы или даже для сферических частиц с усложненной внутренней структурой по-прежнему остается актуальной.

В настоящей статье построено аналитическое решение задачи нахождения поляризуемости сферических наночастиц с произвольным законом распределения поверхностных зарядов. Рассмотрены равномерное и симметричное распределения зарядов по поверхности сферической частицы, а также случай произвольной системы  $N$  точечных поверхностных зарядов.

### 2. Постановка задачи

Известно, что при действии электростатического поля в диэлектрической частице возникает

пропорциональный ему дипольный момент. Для потенциала поля диполя, центр которого расположен в начале координат, справедливо выражение

$$\Phi = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_m r^2}, \quad (1)$$

где  $p$  – абсолютное значение дипольного момента;  $r$  – расстояние до точки наблюдения;  $\theta$  – меридиональный угол в сферической системе координат;  $\varepsilon_m$  – диэлектрическая проницаемость среды.

Поляризуемость  $\alpha$  по определению есть величина

$$\mathbf{p} = \varepsilon_m \alpha \mathbf{E}_0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}_0$  – напряженность электрического поля;  $\alpha$  – поляризуемость, которая в общем случае является тензором.

Для потенциала идеального диполя имеет место формула

$$\Phi = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{4\pi \varepsilon_m r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_m r^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим сплошную сферическую частицу, радиуса  $a$ , помещенную в электростатическое поле с потенциалом  $u_0$  и напряженностью  $\mathbf{E}_0$  (рис. 1). Частица вносит определенное возмущение во внешнее